Kontrolltöö lahendused

Diskreetse matemaatika elemendid

1. variant

1. Korrapärase kolmnurga iga külg jaotatakse n võrdseks osaks. Läbi jaotuspunktide tõmmatakse sirged paralleelselt kolmnurga külgedega. Tõestada induktsiooniga, et need sirged jagavad antud kolmnurga n^2 kolmnurgaks.

Lahendus. Induktsiooni baas. Kui $n = 1$, siis on meil üksainus kolmnurk, mille puhul väide kehtib.

Induktsiooni samm. Eeldame, et külje jaotamisel k osaks tekib k^2 kolmnurka. Vaatleme olukorda, kus kolmnurga iga külg on jaotatud $k + 1$ osaks. Eraldades kolmnurga ühe külje juurde jääva kolmnurkade riba, jääb järele võrdkülgne kolmnurk, mille iga külg on jaotatud k osaks. Induktsiooni eelduse kohaselt sisaldab see k^2 väikest kolmnurka. Eraldatud ribas on k väikest kolmnurka, millel on eelmise rea kolmnurkadega üks ühine külg, nende vahel ja kummaski otsas on veel $k + 1$ kolmnurka. Seega on ribas $2k + 1$ väikest kolmnurka. Ühtekokku on $k+1$ osaks jaotatud kolmnurgas väikesi kolmnurki $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$.

Materjal õpikus. Lk 9, ülesanne 4. Lk 11, ülesanne 23.

2. Instituudis on 4 professorit, kes peavad ühel semestril lugema 10 erinevat loengukursust. Iga professor peab lugema vähemalt kahte loengukursust. Mitmel viisil on võimalik loengukursused professorite vahel jaotada?

Lahendus. Kui üks professor loeb 4 kursust ja ülejäänud professorid 2 kursust, siis selle professori valikuks, kes loeb 4 kursust, on 4 võimalust ning talle kursuste määramiseks $\binom{10}{4}$ võimalust. Ülejäänud professoritest esimesele, nt kõige vanemale, on kursuste andmiseks $\binom{6}{2}$ võimalust, teisele $\binom{4}{2}$ võimalust ning kolmas saab ülejäänud kursused. Kokku saab sel juhul kursusi jagada $4 \cdot \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 75600$ viisil.

Kui kaks professorit loevad kumbki 3 kursust ja kaks ülejäänud kumbki 2 kursust, siis nende professorite valikuks, kes loevad 3 kursust, on $\binom{4}{2}$ võimalust. Neist esimesele (jällegi nt kõige vanemale) kursuste andmiseks on $\binom{10}{3}$ võimalust ning teisele $\binom{7}{3}$ võimalust. Ülejäänud kahest professorist esimesele on kursuste andmiseks $\binom{4}{2}$ võimalust, viimane professor saab ülejäänud kaks kursust. Kursuste jagamiseks on siin seega $\binom{4}{2} \cdot \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} = 151200$ võimalust.

Sellega on kõik kursuste jaotusviisid ammendatud, võimalusi on kokku $75600 + 151200 = 226800$.

Materjal õpikus. Lk 14 (kombinatsioonid). Lk 19 (korrutamis- ja liitmisreegel). Lk 22, ülesanded 21–23. Lk 21, ülesanne 15.

3. Uue seaduseeelnõuga reglementeeritakse, et peaministri palk kasvab eelmise aastaga võrreldes eelmise aasta ja üle-eelmise aasta vahe neljandiku võrra. Käesoleval aastal on palk 80000 krooni, eelmisel aastal oli 60000 krooni. Leida peaministri palga suurus n-ndal aastal.

Lahendus. Olgu A_n peaministri palga suurus n-ndal aastal. Ülesande tingimuste põhjal kehtib seos $(A_n - A_{n-1}) = \frac{1}{4}(A_{n-1} - A_{n-2})$, millest

$$A_n = \frac{5}{4}A_{n-1} - \frac{1}{4}A_{n-2}.$$

Algtingimused on $A_0 = 60000$, $A_1 = 80000$.

Karakteristliku võrrandi $q^2 - \frac{5}{4}q + \frac{1}{4} = 0$ lahendid on $q_1 = 1$, $q_2 = \frac{1}{4}$. Järelikult rekurrentse võrrandi üldlahend on

$$A_n = c_1 + \frac{c_2}{4^n}.$$

Algtingimuste põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 60000 \\ c_1 + \frac{c_2}{4} &= 80000, \end{aligned}$$

mille lahendid on $c_1 = \frac{260000}{3}$, $c_2 = -\frac{80000}{3}$. Peaministri palga väärtus n-ndal aastal on seega

$$A_n = \frac{260000}{3} - \frac{80000}{3 \cdot 4^n} = \frac{20000}{3}\left(13 - 4^{1-n}\right).$$

Materjal õpikus. Lk 36–40 (rekurrentsete võrrandite lahendamine).

4. Teha kindlaks, kas järgmise intsidentsusmaatriksiga määratud graaf on sidus:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Graafil on 6 tippu. Intsidentsusmaatriksist näeme, et tipust 2 viib serv tippudesse 5, 3, 4, 6, tipust 3 omakorda aga viib serv tippu 1. Järelikult pääseb graafis tipust 2 igasse teise tippu ja seega igast tipust igasse teise tippu läbi tipu 2. Seega on graaf sidus.

Materjal õpikus. Lk 49 (intsidentsusmaatriksi mõiste). Lk 53 (sidususe mõiste).

5. Tõestada, et kui graafis leidub sild, siis leidub graafis vähemalt üks tipp, mille aste on paaritu.

Lahendus. Oletame väitevastaselt, et graafis leidub sild, aga iga tipu aste on paarisarv. Eemaldame silla. Sellega tekib graafis kaks uut sidusat komponenti senise asemele. Vaatleme ühte neist komponentidest. See on eraldi võttes sidus graaf. Selle tipu aste, kuhu kinnitus sild, muutus nüüd paarisarvust paarituks, ülejäänud tippude astmed selles komponendis jäid paarituks. Seega on selles komponendis kui omaette sidusas graafis paaritu arv paaritu astmega tippe. See on aga võimatu.

Lahendus 2. Sidusas graafis leidub Euleri tsükkel parajasti siis, kui kõigi tippude astmed on paarisarvud. Et sild ei saa kuuluda ühelegi tsüklile, siis ei leidu graafis Euleri tsüklit (st sellist tsüklit, mis läbib graafi kõik servad). Järelikult pole täidetud Euleri tsükli leidumise tingimus ehk mõne tipu aste peab olema paaritu.

Materjal õpikus. Lk 50, teoreem 1 ja järeldus 1 (paaritu astmega tippe on paarisarv). Lk 61, ülesanne 20. Lk 56, teoreem 6 (Euleri tsükli tingimus sidusas graafis). Lk 61, ülesanne 24.

Kontrolltöö lahendused

Diskreetse matemaatika elemendid

2. variant

1. Tõestada induktsiooniga, et kui naturaalarv n jagub 4-ga, siis arvu 2^n viimane number on 6.

Lahendus. Induktsiooni baas. Kui $n = 4$, siis $2^4 = 16$ lõpeb 6-ga.

Induktsiooni samm. Eeldame, et väide kehtib $n = k$ korral. Järgmine 4-ga jaguv arv on siis $n = k + 4$. Et

$$2^{k+4} = 2^k \cdot 2^4 = 2^k \cdot 16$$

ja induktsiooni eelduse põhjal 2^k lõpeb 6-ga, siis lõpeb 6-ga ka arvude 2^k ja 16 korrutis, nagu nähtub kirjaliku korrutamise algoritmist.

Materjal õpikus. Lk 5, näide 1. Lk 9, ülesanne 3.

2. Mitmel viisil saab 36-kaardilise paki jaotada kaheks kaartide arvu poolest võrdseks osaks nii, et mõlemas pooles oleks vähemalt 1 äss? Ässasid on kokku 4.

Lahendus. Kui ühes pakis on 1 äss ja teises 3 ässa, siis ühte pakki ühe ässa väljavalimiseks on 4 võimalust ning muude kaartide hulgast talle 17 kaardi lisamiseks $\binom{32}{17}$ võimalust, kokku siis $4 \cdot \binom{32}{17} = 2262890880$ võimalust. Sellega on mõlema paki koosseisud üheselt määratud.

Kui mõlemas pakis on 2 ässa, siis nende väljavalimiseks ässade hulgast on $\binom{4}{2}$ võimalust ning ülejäänud kaartide seast talle 18 kaardi lisamiseks $\binom{32}{18}$ võimalust. Kokku on ühe paki moodustamiseks $\binom{4}{2} \cdot \binom{32}{18}$ võimalust. Et aga iga võimalus võib esineda esimeses või teises pakis (sest mõlemas pakis on 2 ässa), siis tegelikult on pakkideks jaotamise võimalusi 2 korda vähem ehk $\frac{1}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{32}{18} = 1414306800$.

Kahe juhu peale kokku on võimalusi kaarte pakkideks jagada järelikult $2262890880 + 1414306800 = 3677197680$.

Materjal õpikus. Lk 14 (kombinatsioonid, näide 5). Lk 22, ülesanded 21–23. Lk 21, ülesanne 16.

3. Kiiresti laieneva Geneetika Instituudi eelarve kasvab iga aasta eelmise aasta ja üle-eelmise aasta vahe poole võrra. Eelmise aasta eelarve oli 10 miljonit, üle-eelmisel aastal 8 miljonit. Leida Geneetika Instituudi eelarve n aasta pärast.

Lahendus. Olgu A_n instituudi eelarve n-ndal aastal. Ülesande tingimuste põhjal kehtib seos $A_n - A_{n-1} = \frac{1}{2}(A_{n-1} - A_{n-2})$, millest

$$A_n = \frac{3}{2}A_{n-1} - \frac{1}{2}A_{n-2}.$$

Algtingimused on $A_0 = 8$, $A_1 = 10$.

Karakteristliku võrrandi $q^2 - \frac{3}{2}q + \frac{1}{2} = 0$ lahendid on $q_1 = 1$, $q_2 = \frac{1}{2}$. Järelikult rekurrentse võrrandi üldlahend on

$$A_n = c_1 + \frac{c_2}{2^n}.$$

Algtingimuste põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 8 \\ c_1 + \frac{c_2}{2} &= 10, \end{aligned}$$

mille lahendid on $c_1 = 12$, $c_2 = -4$. Instituudi eelarve suurus n-ndal aastal on seega

$$A_n = 12 - \frac{4}{2^n} = 12 - 2^{2-n}.$$

Materjal õpikus. Lk 36–40 (rekurrentsete võrrandite lahendamine).

4. Kirjutada välja graafi täiendi intsidentsusmaatriks, kui graafi intsidentsusmaatriks on

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Graafil on 6 tippu. Intsidentsusmaatriksi veergudest näeme, et graafil on olemas servad 34, 13, 45, 14, 24, 15, 25, 56. Graafi täiendil on samuti 6 tippu ning servad on parajasti need, mis antud graafil puuduvad ehk siis 12, 16, 23, 26, 35, 36, 46. Täiendi intsidentsusmaatriks on seega

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Materjal õpikus. Lk 49 (intsidentsusmaatriksi mõiste, täiendgraafi mõiste).

Ülesanne. Kas leidub graaf, mille täiendi intsidentsusmaatriksi võib saada graafi enda intsidentsusmaatriksist nii, et asendada seal kõik nullid ühtedega ja vastupidi?

5. Kaks mängijat värvivad vaheldumisi täisgraafi servi, üks punaseks ja teine siniseks. Võidab see, kellel õnnestub servad värvida nii, et ta saab liikuda mööda oma värvi servi graafi igast tipust igasse teise tippu. Tõestada, et see mäng ei saa jääda viiki (st alati emb-kumb mängija võidab).

Lahendus. Eeldame, et mängijatel on õnnestunud täisgraafi servad ära värvida nii, et kumbki ei ole võitnud. Olgu G antud graafi alamgraaf, kus on ainult punased servad. Siis vastav siniste servadega graaf on selle graafi täiend $\overline{G}$. Eelduse kohaselt on mõlemad mittesidusad. Vaatleme graafis kahte tippu u ja v. Kui need kuuluvad graafi G erinevatesse sidusatesse komponentidesse, siis leidub graafis $\overline{G}$ serv uv. Kui vaadeldavad tipud kuuluvad aga graafi G samadesse sidusatesse komponentidesse, siis valime G mingist muust sidusast komponendist tipu w. Sel juhul leiduvad täiendis $\overline{G}$ servad uw ja wv. Et u ja v olid suvalised, siis saab graafis $\overline{G}$ liikuda igast tipust igasse teise tippu, st $\overline{G}$ on sidus. Vastuolu, sest eeldasime, et mõlemad graafid on mittesidusad.

Materjal õpikus. Lk 61, ülesanne 21. Lk 60, ülesanne 18.

Kontrolltöö lahendused

Diskreetse matemaatika elemendid

3. variant

1. Laps joonistas paberile n kinnist kõverat. Tõestada induktsiooniga, et kõik tekkinud piirkonnad saab värvida roheliseks ja kollaseks nii, et iga kaks sama jooneosaga eraldatud piirkonda on eri värvi.

Lahendus. Induktsiooni baas. Kui $n = 1$, siis värvime kõvera sisepiirkonna roheliseks ja välispiirkonna kollaseks.

Induktsiooni samm. Eeldame, et väide kehtib k kõvera korral, st k kõvera puhul tekkinud piirkonnad saab värvida ülesandes nõutud viisil. Joonistame tasandile veel ühe kõvera. Selle kõvera sisepiirkonnas muudame kõigi piirkondade värvid vastupidiseks, väljaspool aga jätame värvid samaks. Kui kahe naaberpiirkonna ühine rajajoon ei asu viimati lisatud kõveral, siis on nende piirkondade värvid erinevad vastavalt induktsiooni eeldusele, sõltumata sellest, kas piirkonnad asuvad uue kõvera sees või sellest väljas. Kui aga kahe piirkonna rajajoon asub viimati lisatud kõveral, siis on piirkondade värvid erinevad tänu värvide vahetamisele.

Märkus. Eeldame, et kõverad võivad omavahel ainult lõikuda, mitte aga (osaliselt) ühtida.

Materjal õpikus. Lk 7, näide 4.

2. Matemaatikanõukokku kuulub igast 4-st instituudist 4 inimest. Nõukogu on otsustusvõimeline, kui igast instituudist on kohal vähemalt 3 inimest. Mitmel erineval viisil saab see nõukogu olla otsustusvõimeline?

Lahendus. Ühest instituudist kas 3 või 4 inimese valimiseks on $\binom{4}{3}+\binom{4}{4} = 5$ võimalust. Sellist valikut tuleb teostada iga 4 instituudi korral, seega üldse on võimalusi otsustamisvõimelise nõukogu moodustamiseks $5^4 = 625$.

Materjal õpikus. Lk 15 (kordumistega permutatsioonid). Lk 19 (korrutamisreegel).

3. Tuumajaama tuleb igal aastal tööle juurde niipalju inimesi, kui palju oli tööl eelmisel aastal, ja lahkub kahel eelmisel aastal tööl olnute aritmeetilise keskmisega võrdne arv. Eelmisel aastal oli tööl 1000, üle-eelmisel 500 inimest. Mitu inimest on tööl n-ndal aastal?

Lahendus. Olgu A_n töötajate arv n-ndal aastal. Ülesande tingimuste põhjal kehtib seos $A_n = A_{n-1} + A_{n-1} - \frac{1}{2}(A_{n-1} + A_{n-2})$, millest

$$A_n = \frac{3}{2}A_{n-1} - \frac{1}{2}A_{n-2}.$$

Algtingimused on $A_0 = 500$, $A_1 = 1000$.

Karakteristliku võrrandi $q^2 - \frac{3}{2}q + \frac{1}{2} = 0$ lahendid on $q_1 = 1$, $q_2 = \frac{1}{2}$. Järelikult rekurrentse võrrandi üldlahend on

$$A_n = c_1 + \frac{c_2}{2^n}.$$

Algtingimuste põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 500 \\ c_1 + \frac{c_2}{2} &= 1000, \end{aligned}$$

mille lahendid on $c_1 = 1500$, $c_2 = -1000$. Tuumajaama töötajate arv n-ndal aastal on seega

$$A_n = 1500 - \frac{1000}{2^n} = 500(3 - 2^{1-n}).$$

Materjal õpikus. Lk 36–40 (rekurrentsete võrrandite lahendamine).

4. Kirjutada välja graafi intsidentsusmaatriks, kui graafi naabrusmaatriks on

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Graafil on 7 tippu. Intsidentsusmaatriksi veerud vastavad graafi servadele. Vaadeldes antud maatriksi peadiagonaali kohal asuvaid elemente, näeme, et graafil on olemas servad 12, 15, 17, 24, 26, 27, 35, 36, 47, 67. Selliste servadega 7-tipulise graafi intsidentsusmaatriks on

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Materjal õpikus. Lk 48 ja 49 (naabrusmaatriks ja intsidentsusmaatriks).

5. Tõestada, et igas sidusas graafis, mille kõigi tippude astmed on vähemalt 2, saab servadele omistada suunad nii, et tulemuseks on tugevalt sidus graaf, milles aga pärast mingi ühe serva eemaldamisel leidub sisendeid ja väljundeid.

Lahendus. Igas sidusas graafis ei saa servadele suundi omistada nii, et tulemuseks on tugevalt sidus graaf. Selle tõestamiseks võtame näiteks kaks kolmelist tsüklit ja tõmbame silla ühe tsükli mingi tipu ja teise tsükli mingi tipu vahele. Sõltumata sellest, kuidas sellele sillale suund omistada, ei pääse vastavas suunatud graafis enam kaare lõpptipust tagasi algtippu.

Eeldame, et graafi servadele saab omistada suunad nii, et tulemuseks on tugevalt sidus graaf. Valime välja mingi serva uv. Et graafi saab muuta tugevalt sidusaks, ei tohi uv olla sild. Järelikult kuulub ta mingile tsüklile. Orineteerime tsükli servad ühtepidi. Kui tipust v leidub veel mõni suunamata servi vw, siis peab see analoogilisel põhjusel kuuluma mingile tsüklile. Eraldame tipust v lähtudes selle tsükliosa, mis lõpeb varasema tsükli mingis tipus. Selline osa leidub, sest varem või hiljem jõuaksime tippu v tagasi. Vaadeldavale tsükliosale omistame suunad nii, et ahel suunduks tipust v välja. Pärast seda on võimalik igast juba vaadeldud tipust pääseda mööda suunatud servi igasse teise vaadeldud tippu, sest alati on võimalik pääseda kõige esimesele tsüklile ja ka sealt tagasi. Niimoodi vaatame läbi kõik tipuga v intsidentsed servad ning eelneva konstruktsiooni abil anname neile kõigile suunad tipust v välja. Sama operatsiooni kordame tipu u veel suunamata servadega, andes neile kõigile suunad tipu u poole. Kui pärast seda jääb graafis veel suunamata servi järele, siis anname neile suunad samasuguse võttega, võttes tipu v rolli sobiva teise tipu. Tulemuseks saadud graaf on tugevalt sidus. Kui eemaldada serv uv, siis pole graaf enam tugevalt sidus, sest tipp v on sisend ja tipp u väljund.

Materjal õpikus. Lk 80, teoreem 4. Lk 79 viimane lõik.

Kontrolltöö lahendused

Diskreetse matemaatika elemendid

4. variant

1. Tasandil on antud n sirget ($n \geqslant 3$) nii, et ükski kaks neist ei ole paralleelsed ja ükski kolm ei lõiku ühes punktis. Tõestada induktsiooniga, et vähemalt üks piirkond, milleks need sirged tasandi jaotavad, on kujult kolmnurk.

Lahendus. Induktsiooni baas. Olgu $n = 3$. Paarikaupa lõikudes moodustavad kolm sirget kolm lõikepunkti, mis on otsitava kolmnurga tippudeks.

Induktsiooni samm. Eeldame, et väide kehtib k sirge puhul: vähemalt üks piirkond on kolmnurk. Joonistame tasandile veel ühe sirge, nüüd on sirgeid $k+1$.

- Kui uus sirge ei lõika seda kolmnurkset piirkonda, siis jääb see piirkond ka uues olukorras alles.
- Kui sirge lõikab kolmnurkset piirkonda, siis ta lõikab kolmnurga kahte külge ja seetõttu eraldab tipu juurest, kus need küljed lõikuvad, väiksema kolmnurga. Seega on ka sel juhul vähemalt üks piirkond kolmnurk.

Materjal õpikus. Lk 7, näide 4. Lk 10, ülesanne 18 (valem peab seal olema $(n^2+n)/2+1$), ülesanded 19, 20.

2. Riigis on kolm parteid: parempoolne, tsentraalne ja vasakpoolne. Riigi valitsuse 11-st erinevast ministrikohast peab vähemalt 3 kuuluma vasakparteile, vähemalt 3 tsentraalparteile ja vähemalt 3 paremparteile. Mitmel erineval viisil on võimalik ministrikohtade jaotus parteide vahel?

Lahendus. Kui üks partei saab 5 ministrikohta ja ülejäänud 3, siis 5 kohta saava partei valimiseks on 3 võimalust ning talle ministrikohtade andmiseks $\binom{11}{5}$ võimalust. Ülejäänutest järgmisele parteile (nt tähestiku järjekorras) võib 3 ministrikohta anda $\binom{6}{3}$ viisil, viimased 3 kohta saab kolmas partei. Seega sel juhul on ministrikohtade jagamiseks $3 \cdot \binom{11}{5} \cdot \binom{6}{3} = 27720$ võimalust.

Kui kaks parteid saavad kumbki 4 ministrikohta ja kolmas 3, siis 3 kohta saava partei valimiseks on 3 võimalust ning talle ministrikohtade andmiseks $\binom{11}{3}$ võimalust. Ülejäänud parteidest tähestiku järjekorras esimesele parteile saab 4 kohta anda $\binom{8}{4}$ viisil, järelejäänud 4 kohta saab kolmas partei. Sel juhul on kohtade jagamiseks $3 \cdot \binom{11}{3} \cdot \binom{8}{4} = 34650$ võimalust.

Kokku saab ministrikohti jagada $27720 + 34650 = 62370$ viisil.

Materjal õpikus. Lk 14 (kombinatsioonid). Lk 19 (korrutamis- ja liitmisreegel). Lk 22, ülesanded 21–23. Lk 21, ülesanne 15.

3. Rahaahne parun saab oma põldudelt saagiks 4 korda rohkem vilja kui pani kevadel maha. Igal talvel aga viivad kratid minema teatava osa saagist. Kuna krattidel on aasta aega vana info, siis nad varastavad talvel $\frac{7}{4}$ korda rohkem vilja kui oli seal eelmisel kevadel (st poolteist aastat tagasi) külvi alustades. Esimesel kevadel on parunil 100 kg vilja, kui palju on tal seda n-ndal kevadel?

Lahendus. Olgu A_n viljakogus n-ndal aastal. Ülesande tingimuste põhjal kehtib seos

$$A_n = 4A_{n-1} - \frac{7}{4}A_{n-2}.$$

Algtingimused on $A_0 = 0$, $A_1 = 100$.

Karakteristliku võrrandi $q^2 - 4q + \frac{7}{4} = 0$ lahendid on $q_1 = \frac{7}{2}$, $q_2 = \frac{1}{2}$. Järelikult rekurrentse võrrandi üldlahend on

$$A_n = c_1 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^n + \frac{c_2}{2^n}.$$

Algtingimuste põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ \frac{7c_1}{2} + \frac{c_2}{2} &= 100, \end{aligned}$$

mille lahendid on $c_1 = \frac{100}{3}$, $c_2 = -\frac{100}{3}$. Paruni viljavaru suurus n-ndal kevadel on seega

$$A_n = \frac{100}{3} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^n - \frac{100}{3 \cdot 2^n}.$$

Materjal õpikus. Lk 36–40 (rekurrentsete võrrandite lahendamine).

4. Kirjutada välja graafi naabrusmaatriks, kui graafi intsidentsusmaatriks on

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lahendus. Graafil on 7 tippu. Intsidentsusmaatriksi veergudest näeme, et graafil on olemas servad 46, 36, 24, 57, 14, 56, 23, 67, 15, 47. Naabrusmaatriksis vastab igale servale kaks teineteisega sümmeetriliselt paiknevat elementi, üks ülevalpool ja teine allpool peadiagonaali. Seega antud graafi naabrusmaatriks on

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Materjal õpikus. Lk 48 ja 49 (naabrusmaatriks ja intsidentsusmaatriks).

5. Teha kindlaks, kui palju leidub omavahel mitteisomorfseid 5-tipulisi ja 8-servalisi graafe.

Lahendus. Mitteisomorfseid 5-tipulisi ja 8-servalisi graafe on niisama palju kui nende täiendeid. Et 5-tipulisel täisgraafil on $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ serva, siis selliste graafide täiendid on 5-tipulised ja 2-servalised graafid. Niisugusi (mitteisomorfseid) graafe on 2 tükki, sest need kaks serva võivad olla ühise otstipuga või eraldi.

Materjal õpikus. Lk 58, näide 4. Lk 58, isomorfismi definitsioon.